

Singularidades cosmológicas

Leonardo Fernández-Jambrina

Grupo de Investigación en Geometría y Sistemas Discretos
Universidad Politécnica de Madrid
gi.gsd@upm.es
<http://dcain.etsin.upm.es/~discreto>

16 de diciembre 2011, Seminario de Geometría y Física, UCM

- 1 Introducción
- 2 Intentos de definir singularidad
- 3 Singularidades de curvatura
- 4 Incompletitud geodésica
- 5 Singularidades débiles y fuertes
- 6 Singularidades cosmológicas
- 7 Conclusiones

- Observaciones astronómicas de las distancias medidas con la luminosidad de supernovas Tipo Ia, el espectro CMB y la distribución global de materia sugieren una expansión acelerada del Universo.
- Un enfoque intenta tratar este fenómeno considerando que el Universo contiene un fluido exótico, la energía oscura.
- O también la aceleración cósmica pueda deberse a modificaciones de la teoría de la gravitación.
- Esto ha producido un aumento de la lista de posibles evoluciones futuras cosmológicas, dentro de las cuales las singularidades futuras son las más sorprendentes (big rip, singularidades repentinas. . .).
- Ya que las nociones clásicas de singularidad están relacionadas con la incompletitud geodésica, parece interesante analizarlas en cosmologías FLRW dentro de este marco.

- Las singularidades abundan en la Física.
- El potencial coulombiano $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ es singular en el origen.
- Sin embargo, esta singularidad desaparece al introducir la Mecánica Cuántica.
- ¿Por qué este caso es diferente del potencial newtoniano $V(r) = -\frac{GM}{r}$?
- Esencialmente, porque en el caso de la Gravitación, no es meramente una magnitud física la que diverge, sino el propio espaciotiempo el que es singular.
- Siempre podemos *eliminar* la singularidad recortando partes del espaciotiempo.

Singularidades de coordenadas

- El campo gravitatorio g se describe por la métrica del espaciotiempo. En una carta,

$$ds^2 = - \sum_{i,j=0}^3 g_{ij}(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^j.$$

- Es tentador (singularidad de coordenadas) considerar que existe una singularidad en un *suceso* de coordenadas $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ si en él alguna de las funciones g_{ij} , g^{ij} diverge.
- Sin embargo, no es necesariamente así.
- Tenemos el ejemplo de las coordenadas polares en el plano,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2,$$

para el cual $\det g = r^2$ se anula en el origen. . .

- Y sin embargo con un cambio a coordenadas cartesianas desaparece la “singularidad”,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Espaciotiempo de Schwarzschild

- No siempre es tan sencillo reconocerlo.
- Consideremos la métrica del espaciotiempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2 d\Omega_2^2.$$

- Aparentemente es singular en $r = 0$ y en $r = 2M$.
- Sin embargo, el cambio a coordenadas adelantadas de Eddington-Finkelstein,

$$v = t + R, \quad R = r + 2M \ln(r - 2M),$$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega_2^2,$$

elimina la aparente singularidad.

- El horizonte de sucesos $r = 2M$ **no** es singular en el espaciotiempo de Schwarzschild.

Singularidades de escalares polinómicos de curvatura

- Lo mismo puede decirse del tensor de Riemann, ya que siempre puede anularse localmente.
- Una posible definición de singularidad es la relativa a escalares polinómicos de curvatura, R , $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma}\dots$
- Un espaciotiempo presenta una singularidad de curvatura en un *suceso* de coordenadas $(\xi^0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$ si en él alguno de los escalares polinómicos de la curvatura diverge.
- Esta definición presenta una contradicción, ya que si un *suceso* es singular, debería eliminarse del espaciotiempo.
- Para Schwarzschild, $R = 0 = R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$, pero $R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48M^2/r^6$, con lo que en $r = 0$ encontramos una singularidad de curvatura, pero no en el horizonte.

Singularidades de curvatura p.p.

- Otro punto de vista consiste en considerar la curvatura *experimentada* por observadores que sigan una trayectoria.
- Consideramos componentes de la curvatura en una base propagada paralelamente a lo largo de una curva Γ .
- Tendremos una singularidad de curvatura p.p. si alguna de las componentes de la curvatura crece sin límite a lo largo de la curva.
- Podemos verlas como un tipo de singularidad direccional.
- Pueden depender del observador (curva).

Pros/contras singularidades de curvatura

- Son sencillas de comprobar.
- En los espacios de ondas gravitacionales todos los invariantes polinómicos son nulos.
- ¿Incluir invariantes de orden superior tipo $R_{\mu\nu\rho\sigma;\tau}R^{\mu\nu\rho\sigma;\tau}$?, ¿orden 7?
- Se pueden hacer trampas: recortar de la variedad la región próxima a la singularidad de curvatura.
- Con sus pros y sus contras, es lo que calcula la mayoría de los autores.

Clasificación N.O.T. de singularidades cosmológicas

- Big Bang / Crunch: cero a , divergen H , densidad y presión.
- Tipo I: “Big Rip”: diverge a .
- Tipo II: “Sudden”: finitos a , H , densidad, divergen \dot{H} y presión.
- Tipo III: “Big Freeze”: finito a , divergen H , densidad y presión.
- Tipo IV: finitos a , H , \dot{H} , densidad y presión, pero divergen derivadas superiores.
- Tipo V: “ w -singularidades”: a , presión y densidad finitas. Diverge el índice barotrópico $w = p/\rho$.

Geodésicas de un espaciotiempo

- Las geodésicas, parametrizadas por $\gamma(\tau)$ con velocidad $u = \dot{\gamma}$, hacen extrema la distancia lorentziana entre $A = \gamma(a)$, $B = \gamma(b)$,

$$L[\gamma] = \int_a^b \sqrt{-g_{ij}(\gamma(\tau)) u^i(\tau) u^j(\tau)} d\tau.$$

- Tomamos la parametrización afín o propia, para la cual

$$\|\dot{\gamma}(\tau)\|^2 = g_{ij}(\gamma(\tau)) u^i(\tau) u^j(\tau) = \begin{cases} -1 & \text{temporal} \\ 0 & \text{lumínica} \\ +1 & \text{espacial} \end{cases},$$

definida salvo afinidades del parámetro τ , $\tilde{\tau} = \alpha\tau + \beta$.

- Equivalentemente, las geodésicas tienen aceleración nula,

$$\nabla_u u \equiv 0 \Rightarrow \dot{u}^i + \Gamma_{jk}^i u^j u^k = 0, \quad i = 0, \dots, 3.$$

- Las geodésicas temporales describen observadores ideales sometidos únicamente a la gravitación.

Completitud geodésica

- En variedades riemannianas la completitud geodésica es equivalente a la completitud métrica (teorema de Hopf-Rinow).
- Pero es el espaciotiempo es lorentziano...
- Una geodésica es **completa** si se puede extender a todo $\tau \in \mathbb{R}$.
- Asociamos singularidades a geodésicas *causales* incompletas.
- Obviamente, esta definición incluye las regiones eliminadas de una variedad por cirugía.
- Y las singularidades de curvatura pueden alcanzarse en τ finito por geodésicas causales.
- Se pueden extender (o no) añadiendo nuevas cartas.
- Consideramos por tanto variedades en su extensión maximal. Por ejemplo, la extensión de Kruskal del espaciotiempo de Schwarzschild.

- ¿Para qué limitarse a observadores no acelerados?
- Se pueden construir (Geroch) espaciotiempos geodésicamente completos con curvas temporales inextendibles de longitud finita.
- Necesitamos un parámetro afín generalizado.

Parámetro afín generalizado

- Consideremos un punto P de la variedad por el que pasa una curva Γ y una base $B = \{e_0, \dots, e_3\}$ de $T_P M$.
- Transportamos paralelamente la base B a lo largo de Γ .
- Podemos escribir en cualquier punto la velocidad de la curva $u(t) = u^i(t)e_i$.
- Definimos el parámetro afín generalizado como

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\sum_{i=0}^3 (u^i)^2} dt.$$

- Todos los parámetros afines están relacionados por un cambio de la base inicial.

- Decimos que una variedad es *b*-completa (bundle complete) si toda curva C^1 de longitud finita generalizada tiene un punto final.
- En variedades riemannianas equivale a la completitud métrica.
- En variedades lorentzianas *implica* la completitud geodésica.
- La definición usual de ausencia de singularidades es la *b*-completitud.
- No obstante, en lo sucesivo me referiré a la completitud geodésica (causal) exclusivamente.

Espaciotiempo de Taub-NUT

- Es el paradigma de todas las excentricidades en Relatividad,

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{U(t)} + 4l^2 U(t) (d\psi + \cos \theta d\phi)^2 + (t^2 + l^2) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2),$$

$$U(t) = -1 + \frac{2(mt + l^2)}{t^2 + l^2}.$$

- En su versión estacionaria representa un monopolo de masa m y parámetro NUT l .
- Sus propiedades se condensan en el modelo bidimensional

$$ds^2 = -\frac{dt^2}{t} + t d\psi^2,$$

extendible para $t \in \mathbb{R}$ mediante $\varphi = \psi - \log t$,

$$ds^2 = 2d\varphi dt + t d\varphi^2.$$

Modelo de juguete de Taub-NUT

- El modelo de juguete de Taub-NUT,

$$ds^2 = 2d\varphi dt + t d\varphi^2,$$

posee un cantidad conservada, L , del movimiento geodésico, ya que la métrica no depende de φ ,

$$L = g_{\varphi i} u^i = g_{\varphi t} \dot{t} + g_{\varphi \varphi} \dot{\varphi} = \dot{t} + t \dot{\varphi},$$

lo cual unido a la condición de parametrización afín,

$$2\dot{\varphi}\dot{t} + t\dot{\varphi}^2 = 0, \pm 1,$$

conduce a una versión integrada de las ecuaciones geodésicas.

- En el caso lumínico,

$$\left. \begin{aligned} \dot{t} &= -L \\ \dot{\varphi} &= \frac{2L}{t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} t(\tau) &= t_0 - L\tau \\ \varphi(\tau) &= -2 \ln(t_0 - L\tau) \end{aligned} \right\},$$

- Las geodésicas lumínicas del modelo de juguete de Taub-NUT,

$$ds^2 = 2d\varphi dt + t d\varphi^2,$$

$$t(\tau) = t_0 - L\tau, \quad \varphi(\tau) = -2\ln(t_0 - L\tau),$$

nuncan llegan a cruzar $t = 0$ y dan infinitas vueltas entretanto.

- Las geodésicas están definidas para $\tau \in (-\infty, t_0/L)$ y son, por tanto, incompletas.
- Sin embargo, la curvatura es nula. No hay singularidad de curvatura.
- Se dice que las geodésicas están **atrapadas** (imprisoned).
- Es un caso de incompletitud geodésica no asociado a una singularidad de curvatura.

Singularidades fuertes

- La idea de singularidad fuerte se debe a Ellis y a Schmidt: obtener una extensión continua del espaciotiempo.
- Una singularidad se considera **fuerte** si las fuerzas de marea son capaces de desgarrar los objetos finitos que se les aproximan.
- Consideremos una geodésica de velocidad u y formemos una tétrada ortornomal añadiendo tres campos de Jacobi sin vorticidad cualesquiera.
- Estos tres campos definen un volumen.
- Según la definición de Tipler, una singularidad es **fuerte** si dicho volumen tiende a cero al acercarnos al punto final de la geodésica.
- La definición de Królak es menos exigente, ya que sólo requiere que la derivada del volumen respecto al parámetro afín sea negativa.

Caracterización de la fortaleza

- Hay condiciones necesarias y suficientes para la fortaleza (Clarke y Królak) basadas en integrales de la curvatura de Riemann a lo largo de la geodésica incompleta.
- Para modelos FLRW estas condiciones son sencillas, ya que la curvatura de Weyl se anula.
- “Una geodésica lumínica con velocidad u presenta una singularidad fuerte según Tipler en parámetro afín τ_0 si y sólo si la integral $\int_0^\tau d\tau' \int_0^{\tau'} d\tau'' R_{ij} u^i u^j$ diverge cuando τ tiende a τ_0 .”
- “Una geodésica lumínica con velocidad u presenta una singularidad fuerte según Królak en parámetro afín τ_0 si y sólo si la integral $\int_0^\tau d\tau' R_{ij} u^i u^j$ diverge cuando τ tiende a τ_0 .”
- Las condiciones sobre geodésicas temporales son más complicadas.

- Espaciotiempos homogéneos e isotrópos con métrica,

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right), \quad k = 0, \pm 1.$$

- Las ecuaciones geodésicas se reducen a

$$\begin{aligned} \dot{t} &= \sqrt{\delta + \frac{P^2}{a^2(t)}}, \\ \dot{r} &= \pm \frac{P\sqrt{1 - kr^2}}{a^2(t)}, \end{aligned}$$

considerando geodésicas apuntando hacia el futuro.

- P es una constante del movimiento geodésico y $\delta = 0, 1$ para geodésicas lumínicas y temporales.

- Imponemos como condición que el factor de escala $a(t)$ admita un desarrollo en serie en torno al valor t_0 que queremos estudiar,

$$a(t) = c_0|t - t_0|^{\eta_0} + c_1|t - t_1|^{\eta_1} + \dots,$$

con $\eta_0 < \eta_1 < \dots$, $c_0 > 0$.

- A primer orden, el modelo se comporta como un modelo de potencia η_0 :
 - Si $\eta_0 > 0$, el factor de escala se anula en t_0 y tenemos un Big Bang o Big Crunch.
 - Si $\eta_0 = 0$, el factor de escala es finito en t_0 .
 - Si $a(t)$ es analítico, el suceso en t_0 es regular.
 - En caso contrario, una singularidad débil o *repentina* (sudden) aparece.
 - Si $\eta_0 < 0$, el factor de escala diverge en t_0 y aparece un Big Rip.

- El caso lumínico $\delta = 0$ se puede integrar explícitamente,

$$a(t)\dot{t} = P \Rightarrow \int_{t_0}^t a(t') dt' = P(\tau - \tau_0).$$

- En muchos casos, tan sólo necesitamos el primer término,

$$t \simeq t_0 + \left\{ \frac{(1 + \eta_0)P}{c_0} \right\}^{1/(1+\eta_0)} (\tau - \tau_0)^{1/(1+\eta_0)},$$

para $\eta_0 \neq -1$.

- Si $\eta_0 = -1$, el término principal es exponencial,

$$t \simeq t_0 + Ce^{P\tau/c_0}.$$

- De la expresión de t o de \dot{t} se obtiene

$$\dot{t} \simeq \frac{P}{c_0} |t - t_0|^{-\eta_0},$$

$$\ddot{t} \simeq -\frac{\eta_0 P}{c_0} |t - t_0|^{-\eta_0-1} \dot{t} \simeq -\frac{\eta_0 P^2}{c_0^2} |t - t_0|^{-2\eta_0-1}$$

$$t^{(n)} \simeq \lambda_n |t - t_0|^{1-n-\eta_0}.$$

- A medida que η_0 decrece, la regularidad de la geodésica mejora. Para $\eta_0 \leq -1$ estas geodésicas ni siquiera alcanzan t_0 !!!

η_0	η_1	t'	t''	t'''	$t^{(n)}$
$(0, \infty)$	(η_0, ∞)	∞	∞	∞	∞
0	$(0, 1)$	finita	∞	∞	∞
	$(1, 2)$	finita	finita	∞	∞
	$(2, 3)$	finita	finita	finita	∞
$(-1/2, 0)$	(η_0, ∞)	finita	∞	∞	∞
$-1/2$	$(-1/2, 0)$	finita	finita	∞	∞
	$(0, 1/2)$	finita	finita	finita	∞
$(-2/3, -1/2)$	(η_0, ∞)	finita	finita	∞	∞
$-2/3$	$(-2/3, -1/3)$	finita	finita	finita	∞
$(\frac{1-n}{n}, \frac{2-n}{n-1})$	(η_0, ∞)	finita	finita	finita	∞
$(-\infty, -1]$	(η_0, ∞)	/	/	/	/

Fortaleza de las singularidades lumínicas

η_0	η_1	k	c_0	Tipler	Królak	
$(-\infty, -1]$	(η_0, ∞)	$0, \pm 1$	$(0, \infty)$	Regular	Regular	
$(-1, 0)$				Fuerte	Fuerte	
0				$(0, 1)$	Débil	Fuerte
				$[1, \infty)$	Débil	Débil
$(0, 1)$	(η_0, ∞)	$0, 1$	$(0, 1) \cup (1, \infty)$	Fuerte	Fuerte	
1	$(1, \infty)$			Fuerte	Fuerte	
	$(1, \infty)$			Fuerte	Fuerte	
	$(1, 3)$			Débil	Fuerte	
	$[3, \infty)$	-1	1	Débil	Débil	
$(1, \infty)$	(η_0, ∞)			$0, \pm 1$	$(0, \infty)$	Fuerte

Geodésicas temporales

η_0	η_1	k	c_0	Tipler	Królak
$(-\infty, 0)$	(η_0, ∞)	$0, \pm 1$	$(0, \infty)$	Fuerte	Fuerte
0	$(0, 1)$			Débil	Fuerte
	$[1, \infty)$			Débil	Débil
$(0, 1)$	(η_0, ∞)			Fuerte	Fuerte
1	$(1, \infty)$	0, 1	$(0, 1) \cup (1, \infty)$	Fuerte	Fuerte
	$(1, \infty)$	-1		Fuerte	Fuerte
	$(1, 3)$			Débil	Fuerte
	$[3, \infty)$			Débil	Débil
$(1, \infty)$	(η_0, ∞)	$0, \pm 1$	$(0, \infty)$	Fuerte	Fuerte

Clasificación N.O.T. de singularidades cosmológicas

- Big Bang / Crunch: cero a , divergen H , densidad y presión. **Fuerte.**
- Tipo I: “Big Rip”: diverge a . **Fuerte.**
- Tipo II: “Sudden”: finitos a , H , densidad, divergen \dot{H} y presión. **Débil.**
- Tipo III: “Big Freeze”: finito a , divergen H , densidad y presión. **Débil/fuerte.**
- Tipo IV: finitos a , H , \dot{H} , densidad y presión, pero divergen derivadas superiores. **Débil.**
- Tipo V: “ w -singularidades”: a , presión y densidad finitas. Diverge el índice barotrópico $w = p/\rho$. **Débil.**

Clasificación N.O.T. de singularidades cosmológicas

- Big Bang / Crunch: cero a , divergen H , densidad y presión. **Fuerte.**
- Tipo I: “Big Rip”: diverge a . **Fuerte.**
- Tipo II: “Sudden”: finitos a , H , densidad, divergen \dot{H} y presión. **Débil.**
- Tipo III: “Big Freeze”: finito a , divergen H , densidad y presión. **Débil/fuerte.**
- Tipo IV: finitos a , H , \dot{H} , densidad y presión, pero divergen derivadas superiores. **Débil.**
- Tipo V: “ w -singularidades”: a , presión y densidad finitas. Diverge el índice barotrópico $w = p/\rho$. **Débil.**

¡La muerte (del universo) no es el final!

¿ t_0 infinito?

- No es absurdo, ya que para ecuaciones de estado $p = w\rho$ con $w \in (-5/3, -1)$, ¡los fotones necesitan tiempo propio infinito para alcanzar el Big Rip!
- El caso lumínico se integra fácilmente,

$$a(t)t' = P \Rightarrow \int_{t_0}^t a(t') dt' = P(\tau - \tau_0).$$

- Por tanto, las geodésicas lumínicas alcanzan $t = \infty$ en tiempo propio finito si y sólo si la integral $\int^{\infty} a(t') dt'$ es finita.
- Para factores de escala que se comportan cerca de infinito como $a(t) \simeq ct^p$ el tiempo coordenado t diverge en tiempo propio **finito** τ_0 si $p < -1$ ($w \in (-5/3, -1)$).

¿Extendibilidad?

- En principio, nada serio sucede en $t = \pm\infty$, ya que la curvatura se anula como t^{-2} ¡No hay singularidad de escalares de curvatura!
- Normalmente esto quiere decir que nuestra carta se puede extender a otra mayor.
- O que se dan comportamientos más molestos como las geodésicas atrapadas.
- En nuestro caso,

$$R_{ij}u^i u^j = -\frac{2p}{(p+1)^2} \frac{1}{|\tau - \tau_0|^2},$$

produce una divergencia logarítmica con la definición de Tipler y una divergencia de potencia inversa según Królak para $p < -1$ y tenemos por tanto una singularidad fuerte.

- Es una singularidad direccional o de curvatura p.p.
- Resultados similares se producen con las geodésicas temporales.

Duración del universo

- Podemos calcular el tiempo hasta el Big Rip, tal como lo experimenta un observador no acelerado,

$$\begin{aligned} T &= \int^0 \frac{dt}{\sqrt{1 + P^2/a^2(t)}} = \int^0 \frac{dt}{\sqrt{1 + P^2/c^2 t^{2\eta}}} \\ &= \left(\frac{P}{c}\right)^{1/\eta} \int^0 \frac{x^\eta dx}{\sqrt{1 + x^{2\eta}}} \end{aligned}$$

con el cambio de variable $x = -(c/P)^{1/\eta} t$.

- Como $\eta < 0$, la duración del universo decrece al incrementarse el momento lineal P .

Duración del universo

- Podemos calcular el tiempo hasta el Big Rip, tal como lo experimenta un observador no acelerado,

$$\begin{aligned} T &= \int^0 \frac{dt}{\sqrt{1 + P^2/a^2(t)}} = \int^0 \frac{dt}{\sqrt{1 + P^2/c^2 t^{2\eta}}} \\ &= \left(\frac{P}{c}\right)^{1/\eta} \int^0 \frac{x^\eta dx}{\sqrt{1 + x^{2\eta}}} \end{aligned}$$

con el cambio de variable $x = -(c/P)^{1/\eta} t$.

- Como $\eta < 0$, la duración del universo decrece al incrementarse el momento lineal P .

Don't drive fast!!



- Una clasificación de las singularidades en modelos FLRW en función de los exponentes de un desarrollo del factor de escala.
- La velocidad de las geodésicas causales diverge para Big Bang y Big Crunch, pero es finita para Big Rip y singularidades “sudden”.
- En modelos con $\eta_0 \leq -1$, las geodésicas lumínicas evitan la singularidad Big Rip.
- Los modelos con comportamiento regular cerca de t_0 son aquellos con $\eta_0 = 0$ (de Sitter, sudden...) o con $\eta_0 = 1$, $k = -1$, $c_0 = 1$ (Milne).
- Observadores en modelos phantom con $w \in (-5/3, -1)$ asintótico tienen en $t = \pm\infty$ una singularidad fuerte.
- Observadores con momento lineal P pueden decrecer la duración del universo hasta el Big Rip a voluntad.



R.P. Geroch

Ann. Phys. **48**, 526-540 (1968)



S.W. Hawking, G.F.R. Ellis

The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge University Press, Cambridge, (1973)



F.J. Tipler

Phys. Lett. **A64**, 8 (1977)



C.J.S. Clarke, A. Królak

Journ. Geom. Phys. **2**, 127 (1985)



A. Królak






Class. Quant. Grav. **3**, 267 (1986)



S. Nojiri, S. D. Odintsov, S. Tsujikawa

Phys. Rev. D **71** 063004 (2005)

Nuestras referencias

-  L. Fernández-Jambrina,
w-cosmological singularities
Phys. Rev. D **82** 124004-1 (2010)
-  L. Fernández-Jambrina, R. Lazkoz
Singular fate of the universe in modified theories of gravity
Phys. Lett. B **670** 254 (2009)
-  L. Fernández-Jambrina
Hidden past of dark energy cosmological models
Phys. Lett. B **656** 9 (2007)
-  L. Fernández-Jambrina, R. Lazkoz,
Classification of cosmological milestones
Phys. Rev. D **74** 064030 (2006)
-  L. Fernández-Jambrina, R. Lazkoz,
Geodesic behaviour of sudden future singularities
Phys. Rev. D **70** 121503 (2004)

¡Gracias por vuestra paciencia!

